**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**

**FAZA LOCALĂ 10.02.2024**

**CLASA a X-a**

**SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE**

**Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare corectă se asimilează conform baremului.**

**Subiectul 1**. Se consideră funcțiile $f,g,h:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ cu $h(x)=f(x)+\sqrt{2024}g(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{Q}$.

$a)$ Să se arate că, dacă cel puțin una dintre funcțiile $f$ și $g$ este injectivă, atunci $h$ este injectivă.

$b)$ Dacă $h$ este injectivă, este necesar ca cel puțin una dintre funcțiile $f$ și $g$ să fie injectivă?

**Barem de notare**

$a)$ $f(x)+\sqrt{2024}g(x)\in\mathbb{Q},\forall x\in\mathbb{Q}$

Cum $f(x),g(x)\in\mathbb{Q}$ și $\sqrt{2024}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, rezultă $g(x)=0,\forall x\in\mathbb{Q}$............................**3p**

$g$ nu este injectivă, rezultă că $f$ este injectivă....................................................................**1p**

$h(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{Q}$, deci $h$ este injectivă............................................................................**1p**

$b)$ Da. $h(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{Q}$ Dacă $h$ este injectivă, rezultă că $f$ este injectivă..........................................................................................................................**2p**

**Subiectul 2**. Fie funcția $f:(0,\infty)\setminus\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=x^{\log_{2023}2024}+2023^{\log_x 2024}$.

Să se arate că $\{x\in(0,\infty)\setminus\{1\}\mid f(x)\geq 2\}=\{x\in(0,\infty)\setminus\{1\}\mid f(x)\geq 4048\}$.

Alina Paraschiv

**Barem de notare**

• $f(x)=2024^{\log_{2023}x}+2024^{\log_x 2023}$ ……………………………………………………………………………**1p**

Fie $A=\{x\in(0,\infty)\setminus\{1\} \mid f(x)\geq 2\}$ și $B=\{x\in(0,\infty)\setminus\{1\} \mid f(x)\geq 4048\}$

• Dacă $x\in(0,1)$, atunci $\log_{2023}x<0$ și $\log_x 2023<0$, deci $f(x)<2$, de unde $x\notin A\cup B$. Rezultă $A\cup B\subseteq(1,\infty)$ ........................................................................................**2p**

• Dacă $x\in(1,\infty)$, atunci $\log_{2023}x>0$, $\log_x 2023>0$ și, aplicând de două ori inegalitatea mediilor, obținem $f(x)\geq 2\sqrt{2024^{\log_{2023}x+\log_x 2023}}\geq 2\sqrt{2024^2}=4048$,

deci $x\in A\cap B$, de unde $(1,\infty)\subseteq A\cap B$ ........................................................................**3p**

• Obținem $A\cup B\subseteq A\cap B$, deci $A=B$ ........................................................................**1p**

**Subiectul 3.** Fie $n$ un număr natural nenul. Să se arate că numărul $n^2+2^{[\log_2 n]}$ se poate scrie ca produs de două numere naturale consecutive dacă și numai dacă $n$ este o putere cu exponent natural a lui 2.

Cristinel Mortici, Gazeta Matematică

**Barem de notare**

• Șirul $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, cu $x_k=k(k-1)$ este strict crescător........................................................**1p**

• $x_n=n(n-1)<n^2+\dfrac{n}{2}=n^2+2^{\log_2 n-1}<n^2+2^{[\log_2 n]}\leq n^2+2^{\log_2 n}=n(n+1)=x_{n+1}$
..........................................................................................................................................**4p**

• $n^2+2^{[\log_2 n]}$ este termen al șirului $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}\Leftrightarrow n^2+2^{[\log_2 n]}=n(n+1)\Leftrightarrow[\log_2 n]=\log_2 n\Leftrightarrow\log_2 n\in\mathbb{N}\Leftrightarrow n=2^p$ cu $p\in\mathbb{N}$ ..........................................................................**2p**

**Subiectul 4**. Se consideră numerele complexe $a,b,c,d$ astfel încât $|a|=|b|=|c|=|d|=1$, $|a+b+c+d|=\sqrt{2}$ și $a^2+b^2+c^2+d^2=0$. Să se arate că $|a^3+b^3+c^3+d^3|=2\sqrt{2}.$

Flavian Georgescu

**Barem de notare**

• Cum $\sum a^2=0$ și $|a^2|=|b^2|=|c^2|=|d^2|=1$, rezultă că $a^2,b^2,c^2,d^2$ sunt afixele vârfurilor unui dreptunghi ( eventual degenerat) înscris în cercul unitate. După eventuale redenumiri ale afixelor, putem presupune că $a^2=-b^2, c^2=-d^2$ și, mai mult, $b=ia, d=ic$ ..........................................................................................................................**3p**

• Cum $|a+b+c+d|=\sqrt{2}$, rezultă $|(1+i)(a+c)|=\sqrt{2}$, deci $|a+c|=1$. Atunci $1=(a+c)\overline{(a+c)}=2+a\bar{c}+\bar{a}c$, deci $a\bar{c}+\bar{a}c=-1$, de unde $\frac{a}{c}+\frac{c}{a}=-1$, echivalent cu $a^2+c^2=-ac$ ........................................................................................................................**2p**

• Avem $a^3+b^3+c^3+d^3=(1-i)(a^3+c^3)=(1-i)(a+c)(a^2-ac+c^2)=$
$=-2ac(1-i)(a+c)$, de unde $|a^3+b^3+c^3+d^3|=2|ac||1-i||a+c|=2\sqrt{2}$ ..............**2p**

.