OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 10.02.2024

CLASA a 11-a

SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Problema 1 (autor ***)

Fie A o matrice pătratică de ordinul 2, cu elemente numere reale și cu proprietatea $A^3 = I_2$. Arătați că $\det A = 1$ și determinați valorile posibile ale sumei elementelor de pe diagonala principală a matricei.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Cum $(\det A)^3 = \det(A^3) = \det I_3 = 1$ și $\det A$ este număr real, obținem $\det A = 1$	**2p**
Este cunoscut că $A^2 = sA - dI_2$, unde d este determinantul și s este suma elementelor de pe diagonala principală a matricei	**1p**
Atunci $A^3 = sA^2 - A = (s^2-1)A - sI_2$, deci ipoteza devine $(s^2-1)A = (s+1)I_2$	**1p**
Dacă $s \neq -1$, atunci $(s-1)A = I_2$, de unde $(s-1)^3 = 1$, deci $s = 2$. Valoarea $s = 2$ se obține, de exemplu, pentru $A = I_2$	**2p**
Valoarea $s = -1$ se obține dacă, de exemplu, $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	**1p**

Problema 2 (autor ***)

a) Arătați că, dacă X, Y sunt matrice pătratice de ordinul 2, cu elemente numere reale, atunci $\det(X+Y) + \det(X-Y) = 2(\det X + \det Y)$.

b) Arătați că, dacă A și B sunt matrice pătratice de ordinul 2, cu elemente numere reale, iar $\det(AB+BA) \leq 0$, atunci $\det(A^2+B^2) \geq 0$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Pentru $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ și $Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$ avem $\det(X+Y) + \det(X-Y) =$ $= 2(x_1x_4 + y_1y_4 - x_2x_3 - y_2y_3) = 2\det X + 2\det Y$	**2p**
Avem $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ și $(A-B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2$	**2p**
Luând $X = A^2 + B^2$, $Y = AB + BA$, adunând relațiile precedente și folosind a) reiese $2\det(A^2+B^2) + 2\det(AB+BA) = \det((A+B)^2) + \det((A-B)^2)$	**2p**
Cum $\det((A+B)^2) \geq 0$, $\det((A-B)^2) \geq 0$ și $\det(AB+BA) \leq 0$, rezultă concluzia	**1p**

Problema 3 (autor ***)

Fie $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ o funcție crescătoare, cu proprietatea $f(f(x))=\sqrt{x^2+x}$.

a) Arătați că $f(x)>x$, pentru orice $x>0$.

b) Determinați $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Dacă $f(x)\le x$, atunci $f(f(x))\le f(x)\le x$, de unde $\sqrt{x^2+x}\le x$ – fals	**2p**
b) Arătăm că $f(x)<x+1$	**1p**
Dacă $f(x)\ge x+1$, atunci $f(f(x))\ge f(x+1)\ge f(x)\ge x+1$, deci $\sqrt{x^2+x}\ge x+1$ – fals	**2p**
Deoarece $\frac{x}{x}\le\frac{f(x)}{x}\le\frac{x+1}{x}$, pentru orice $x>0$, și $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=1$, limita cerută este 1	**2p**

Problema 4 (autor *Adrian Boțan*, GM-B nr. 6-7-8/2023)

Fie $(a_n)_{n\ge1}$ un șir descrescător de numere reale nenule, cu $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$ și $(b_n)_{n\ge2}$ șirul definit prin $b_n=\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}-n$.

a) Arătați că, dacă $l>0$, atunci șirul $(b_n)_{n\ge2}$ este convergent.

b) Folosind eventual inegalitatea $t-1\ge\ln t$, oricare ar fi numărul real $t\ge1$, arătați că, dacă $l=0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Din ipoteză reiese că $a_1\ge a_2\ge\ldots\ge a_n\ge l>0$	**1p**
Rezultă $b_{n+1}-b_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}+\frac{a_{n+1}}{a_1}-\frac{a_n}{a_1}-1=\frac{(a_n-a_{n+1})(a_1-a_{n+1})}{a_1a_{n+1}}\ge0$, deci $(b_n)_{n\ge2}$ este crescător	**2p**
$b_n=\frac{a_1-a_2}{a_2}+\ldots+\frac{a_{n-1}-a_n}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}-1\le\frac{(a_1-a_2)+\ldots+(a_{n-1}-a_n)}{l}+\frac{a_n-a_1}{a_1}\le\frac{a_1-l}{l}$, deci $(b_n)_{n\ge2}$ este mărginit superior, de unde reiese că $(b_n)_{n\ge2}$ este convergent	**2p**
b) $b_n=\left(\frac{a_1}{a_2}-1\right)+\ldots+\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}-1\right)+\frac{a_n}{a_1}-1\ge\ln\left(\frac{a_1}{a_2}\cdot\ldots\cdot\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)+0-1=\ln\frac{a_1}{a_n}-1$ și $\frac{a_1}{a_n}\to\infty$ implică cerința	**2p**