OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

FAZA LOCALĂ 10.02.2024

CLASA a XII-a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare corectă se asimilează conform baremului.

Subiectul 1. Să se determine primitivele funcției $f:(-3,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^3e^x}{(x+3)^2}$

Mihaela Berindeanu, Gazeta Matematică

Barem de notare

- $\int \dfrac{x^3e^x}{(x+3)^2}dx=\int\left(-\dfrac{1}{x+3}\right)' x^3e^x dx=-\dfrac{1}{x+3}x^3e^x+\int\dfrac{1}{x+3}\left(3x^2+x^3\right)e^x dx=$ **3p**
- $=-\dfrac{1}{x+3}x^3e^x+\int x^2e^x dx=-\dfrac{1}{x+3}x^3e^x+x^2e^x-\int 2xe^x dx=$ **2p**
- $-\dfrac{1}{x+3}x^3e^x+x^2e^x-2(x-1)e^x+C=\dfrac{x^2-4x+6}{x+3}e^x+C$ **2p**

Subiectul 2. Fie $(G,\cdot)$ un grup. Spunem că un morfism de grupuri $f:G\to G$ are proprietatea (P), dacă există un număr $k\in\mathbb{Z}$ astfel încât $f\left(x^k\right)=x$, pentru orice $x\in G$.

$a)$ Să se arate că, dacă f are proprietatea (P), atunci f este izomorfism.

$b)$ Știind că $(G,\cdot)$ este comutativ, finit, cu n elemente, să se arate că f are proprietatea (P) dacă și numai dacă există $q\in\mathbb{Z}$ cu $(n,q)=1$ astfel încât $f(x)=x^q$, pentru orice $x\in G$.

Marian Andronache

Barem de notare

$a)$ • Fie $x \in G$. Cum $f\left(x^k\right) = x \Rightarrow f$ este surjectivă……………………………………………**1p**

• Fie $x, y \in G$. Atunci

$f(x) = f(y) \Rightarrow (f(x))^k = (f(y))^k \Rightarrow f\left(x^k\right) = f\left(y^k\right) \Rightarrow x = y$, deci f este injectivă……………………………………………………………………………………………**1p**

$b)$ • Fie f cu proprietatea (P), $k \in \mathbb{Z}$ cu $(f(x))^k = x$ și p un număr prim cu $p \mid n$ și $p \mid k$. Din teorema lui Cauchy, există $a \in G \setminus \{e\}$ cu $a^p = e$, unde e este elementul neutru al lui G. Rezultă $e = f(e) = f\left(a^k\right) = a$, contradicție, deci $(n,k) = 1$. Fie $t, q \in \mathbb{Z}$ cu $tn + qk = 1$, atunci $(n,q) = 1$ și $f(x) = f\left(x^{tn+qk}\right) = f\left(x^{qk}\right) = f\left(\left(x^q\right)^k\right) = x^q$, pentru orice $x \in G$ ……………………………………………………………**3p**

• Reciproc, dacă $f(x) = x^q$ cu $(n,q) = 1$, cum G este abelian, rezultă că f este morfism. Fie $t, k \in \mathbb{Z}$ cu $tn + qk = 1$, atunci $f\left(x^k\right) = x^{kq} = x^{1-tn} = x$ pentru orice $x \in G$, deci f are proprietatea (P) ……………………………………………………**2p**

Subiectul 3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție care admite o primitivă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $|F(x)| + f(x) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

$a)$ Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -e^x$ verifică ipoteza problemei.

$b)$ Să se determine toate funcțiile f care verifică ipoteza problemei.

Vlad Florentin Drinceanu și Flavian Georgescu

Barem de notare

$a)$ • $F(x) = -e^x$ are proprietatea din enunț, deci f verifică ipoteza problemei………………**2p**

$b)$ • Fie f cu proprietatea din enunț și F o primitivă cu $|F(x)| + f(x) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval, cu $F(x) \geq 0$ pentru $x \in I$. Cum $F(x) + f(x) = 0$, rezultă că $\left(e^x F(x)\right)' = 0$, deci $e^x F(x) = k \geq 0$. Obținem $F(x) = ke^{-x}$, deci $f(x) = pe^{-x}$ oricare ar fi $x \in I$, cu $p \leq 0$ ……………………………………………………**1p**

• Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval cu $F(x) \le 0$ pentru $x \in I$. Cum $-F(x)+f(x)=0$, rezultă că $\left(e^{-x}F(x)\right)' = 0$, deci $e^{-x}F(x) = k \le 0$. Obținem $F(x) = ke^{x}$, deci $f(x) = ke^{x}$ oricare ar fi $x \in I$, cu $k \le 0$ **1p**

• Dacă există $a \in \mathbb{R}$ cu $F(a) = 0$, cum $f(x) = -\left|F(x)\right| \le 0$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, rezultă că F este descrescătoare, deci $F(x) \ge 0$ pe $(-\infty, a)$ și $F(x) \le 0$ pe (a, ∞). Atunci $F(x) = pe^{-x}$, $x \in (-\infty, a)$ și $F(x) = ke^{x}$, $x \in (a, \infty)$, iar, din continuitatea lui F în a, obținem $p = k = 0$, deci $F(x) = 0$, de unde $f(x) = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ **2p**

• Obținem funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu $f(x) = ke^{-x}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și $f(x) = ke^{x}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, cu $k \le 0$, funcții care verifică ipoteza problemei.................................**1p**

Subiectul 4. Fie n, k două numere naturale cu $1 \le k \le n$, $(G, \cdot)$ un grup cu n elemente și X_0 o submulțime a lui G, cu k elemente. Pentru fiecare $a \in G$ notăm cu $aX_0 = \left\{ax \middle| x \in X_0\right\}$ și fie $M = \left\{Y \subseteq G \middle| \exists a \in G, Y = aX_0\right\}$. Știind că M are cel mult $\dfrac{n}{k}$ elemente, să se arate că G are un subgrup cu k elemente.

Marian Andronache

Barem de notare

• Fie $a \in G$ și $x \in X_0$. Cum $a \in ax^{-1}X_0 \in M$, rezultă că $G = \bigcup\limits_{Y \in M} Y$ **2p**

• Fie $Y = aX_0 \in M$. Cum funcția $f : X_0 \to Y, f(x) = ax$ este bijectivă, rezultă că $|Y| = k$, unde $|A|$ reprezintă cardinalul mulțimii A. Cum $n = |G| = \left|\bigcup\limits_{Y \in M} Y\right| \le \sum\limits_{Y \in M} |Y| \le \dfrac{n}{k} \cdot k = n$, rezultă că $|M| = \dfrac{n}{k}$ și elementele lui M reprezintă o partiție a lui G. **3p**

• Fie $Y_0 = aX_0$, cu $e \in Y_0$, unde e este elementul neutru al lui G. Fie $y_1 = ax_1, y_2 = ax_2$, cu $x_1, x_2 \in X_0$. Atunci $y_1^{-1}y_2 = x_1^{-1}a^{-1}ax_2 = x_1^{-1}x_2 \in x_1^{-1}X_0$. Cum $e \in x_1^{-1}X_0$, rezultă că $x_1^{-1}X_0 = Y_0$, deci $y_1^{-1}y_2 \in Y_0$, de unde Y_0 este subgrup al lui G cu k elemente..............**2p**