MINISTERUL EDUCAȚIEI
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
BUCUREȘTI, ETAPA LOCALĂ, 10.02.2024

CLASA a 11 -a

SUBIECTE

Problema 1

Fie A o matrice pătratică de ordinul 2, cu elemente numere reale și cu proprietatea $A^3 = I_2$. Arătați că $\det A = 1$ și determinați valorile posibile ale sumei elementelor de pe diagonala principală a matricei.

Problema 2

a) Arătați că, dacă X, Y sunt matrice pătratice de ordinul 2, cu elemente numere reale, atunci $\det(X+Y) + \det(X-Y) = 2(\det X + \det Y)$.

b) Arătați că, dacă A și B sunt matrice pătratice de ordinul 2, cu elemente numere reale, iar $\det(AB+BA) \le 0$, atunci $\det(A^2+B^2) \ge 0$.

Problema 3

Fie $f:(0,\infty) \to (0,\infty)$ o funcție crescătoare, cu proprietatea $f(f(x)) = \sqrt{x^2+x}$.

a) Arătați că $f(x) > x$, pentru orice $x > 0$.

b) Determinați $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Problema 4

Fie $(a_n)_{n\ge1}$ un șir descrescător de numere reale nenule, cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ și $(b_n)_{n\ge2}$ șirul definit prin $b_n = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} - n$.

a) Arătați că, dacă $l > 0$, atunci șirul $(b_n)_{n\ge2}$ este convergent.

b) Folosind eventual inegalitatea $t-1 \ge \ln t$, oricare ar fi numărul real $t \ge 1$, arătați că, dacă $l = 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.