



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

BUCUREȘTI, ETAPA LOCALĂ, 10.02.2024

CLASA a 9 -a

SUBIECTE

Problema 1

Pentru fiecare număr natural nenul n considerăm intervalul $I_n = \left[\frac{n+1}{n}, \frac{16n-4}{n+1} \right]$.

- Determinați valorile lui n pentru care mulțimea $I_n \cap \mathbb{N}$ are exact 13 elemente.
- Determinați numărul minim și numărul maxim de elemente pe care le au mulțimile $I_n \cap \mathbb{N}$, pentru $n = 1, 2, 3, \dots$.

Problema 2

Rezolvați ecuația $[x[x]] = 1$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

Problema 3

- Fie S, T, U, V patru puncte în plan, X mijlocul segmentului ST și Y mijlocul segmentului UV . Arătați că $2\overline{XY} = \overline{SU} + \overline{TV}$.
- Fie $ABCDE$ un pentagon convex și F, G, H, I, J, K mijloacele segmentelor BC , CD , DE , EA , GI , respectiv FH . Presupunem că $J \neq K$. Arătați că $JK \parallel AB$.

Problema 4

Arătați că, dacă x este număr real nenul și $\{x\} + \left\{ \frac{1}{x} \right\} = 1$, atunci $\{x^2\} + \left\{ \frac{1}{x^2} \right\} = 1$, unde $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real a .